

КВАЛИФИКАЦИОННЫЙ КУРС

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

по математическим дисциплинам

Математический анализ

► Решить систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса и по формулам Крамера (номера вариантов указаны в круглых скобках):

$$\begin{cases} 3x_1 - 1x_2 + 5x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 25 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \end{cases}$$

► Даны вершины треугольника $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Найти:

- длины сторон AB , BC , CA треугольника;
- уравнения сторон AB , CA треугольника;
- внутренний угол A треугольника в градусах и минутах;

Сделать чертеж.

Координаты	x_A	y_A	x_B	y_B	x_C	y_C
	1	1	7	4	4	5

► Решить задачу линейного программирования графически

Определить минимум и максимум функции $F = 3x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ -4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

► Изучение рынка специалистом фирмы показало, что при изменении веса специальной добавки (возможно, соли, сахара, кислоты, красителя, ароматизатора, консерванта и т.п.) в кулинарном изделии, спрос на него можно охарактеризовать функцией $y = a_0 \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) + a_3$. Здесь x - вес добавки, y - спрос в условных единицах. Технологические требования и медицинские нормы таковы, что вес добавки должен быть в пределах $x \in [a; b]$. Найти оптимальное решение производственной задачи повышения спроса на выпускаемое фирмой кулинарное изделие. Коэффициенты, характеризующие влияние добавки на спрос и предельные значения веса добавки приведены в таблице.

Коэффициенты	a_0	a_1	a_2	a_3	a	b
	-0,02	-10	50	0	10	40

► Найти производные $\frac{dy}{dx}$ следующих функций:

а) $y = \ln^3 \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;

б) $y = x^{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}$;

в) $y = x \ln y$

► Окно имеет форму прямоугольника, завершённого полукругом. Периметр (p) фигуры задан. Каковы должны быть размеры прямоугольника, для того, чтобы окно пропускало наибольшее количество света, то есть имело наибольшую площадь.

► Исследовать функцию и построить ее график. Указать: область существования, точки разрыва и односторонние пределы в точках разрыва, четность или нечетность, точки экстремума, интервалы возрастания и убывания, точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости, асимптоты.

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

► Найти неопределенный интеграл и результаты интегрирования проверить дифференцированием.

$\int (x^{\sqrt{x}} + 1)^{\sqrt{x}} x dx$;

б) $\int x e^{3x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}}$.

► Воспользовавшись приложениями определенного интеграла, вычислить площадь фигуры ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 7x - 12$

Геометрия и топология

► Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

► Вычислить расстояние d между параллельными прямыми $3x - 4y - 10 = 0$ и $9x - 11y + 2 = 0$.

► Дан эллипс $5x^2 + 9y^2 = 45$. Найти его полуоси и фокусы.

► Найти точки пересечения поверхности и прямой $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ и $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} + \frac{z+2}{4}$.

► Вычислить кривизну и кручение винтовой линии $\vec{r} = a \cdot \vec{e}(\varphi) + b \cdot \varphi \cdot \vec{k}$, где $a, b > 0$ — постоянные, а $\vec{e}(\varphi) = \vec{i} \cdot \cos \varphi + \vec{j} \cdot \sin \varphi$.

Дифференциальные уравнения

► Найти решение задачи Коши: $y' - \frac{1}{x}y = x^2$, $y(1) = 0$.

- Решить дифференциальное уравнение: $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$.
- Решить дифференциальное уравнение: $x dx - y dy = yx^{\frac{1}{2}} dy - xy^{\frac{1}{2}} dx$.
- Решить дифференциальное уравнение: $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
- Найти решение задачи Коши: $y'' + 2y' = e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Теория вероятностей и математическая статистика

► Слово «БАРБАРИС» составлено из нескольких карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки имеют одинаковые форму, цвет и рисунок обратной стороны. Затем их переворачивают, смешивают и вынимают случайным образом по одной, раскладывая в ряд в извлеченном порядке. Найти вероятность того, что буквы образуют заданное слово.

Решить задачу, используя классическое определение вероятности и методы комбинаторики.

Решить задачу, используя произведение вероятностей.

► Студентка собирается купить $m=3$ дешевых дискет. Продавец предлагает ей выбрать их из коробки, содержащей $n=18$ дискет, зная, что среди них $k=8$ дискет некачественных. Какова вероятность того, что выбранные случайным образом без проверки дискеты все окажутся некачественными?

Решить задачу, используя классическое определение вероятности и методы комбинаторики.

Решить задачу, используя произведение вероятностей.

► В ящике лежат 30 деталей первого сорта и 5 деталей второго сорта. Наудачу извлекают три детали. Чему равна вероятность того, что все три детали первого сорта?

► По шоссе, на котором стоит бензоколонка, проезжают грузовые и легковые автомашины, а также пассажирские автобусы в отношении соответственно 2:2:1. Вероятность того, что грузовая машина будет заправляться, равна 0,08; для легковой эта вероятность равна 0,16; для автобуса - 0,03. К бензоколонке подъехала заправляться машина. Найти вероятность того, что это легковая машина.

► В двух урнах имеются черные и белые шары: в первой урне 3 белых и 4 черных, во второй – 5 белых и 3 черных. Из первой урны берут наугад два шара и помещают во вторую урну. После этого из второй урны извлекают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

► Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдет не менее трех?

► Цены на этот «ТОВАР» в разных местах являются случайными. В таблице указаны эти случайные величины X и вероятности, с которыми эти случайные величины реализуются. Иначе говоря, дано распределение случайной дискретной величины X . Найти:

- математическое ожидание случайной величины,
- дисперсию случайной величины,

- *среднее квадратичное отклонение случайной величины,*

X	1,2	1,5	1,7	2,6	2,7	3,8
p	0,05	0,25	0,3	0,25	0,1	0,05

Уравнения математической физики

- *Привести к каноническому виду уравнение математической физики*

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

- *Метод Даламбера для бесконечной струны. Найти решение уравнения*

математической физики $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u(x, 0) = x^2$, $u'_t(x, 0) = 0$.

- *Некоторая струна, закреплена на концах $x=0$ и $x=l$. Смещение точек этой*

струны определяется формулой: $u(x, t) = \frac{l}{\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{\sqrt{2}\pi at}{l} \cdot \sin \frac{\sqrt{2}\pi x}{l}$. *Записать уравнение*

колебания струны, которому удовлетворяет эта функция. Определить начальную форму данной струны и начальные скорости ее точек.

- *Записать уравнение теплопроводности в стержне. Найти стационарное (не зависящее от времени) распределение температуры $u(x)$ в стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня $u(0) = 1$, $u(l) = 2$.*

Дискретная математика

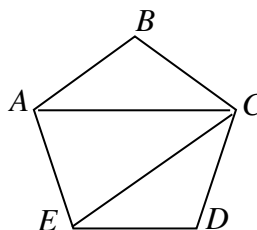
- *С помощью таблиц истинности, доказать справедливость формулы:*

$$\bar{c} \cap (\overline{a \cup b}) = \bar{a} \cap (\overline{b \cup c}).$$

- *Перевести натуральную дробь $\frac{7}{12}$ из десятичной системы счисления в восьмеричную.*

- *Составить таблицу истинности для логического выражения: $(a \cap b) \cup (a \cup \bar{c})$.*

- *Записать логическое выражение в совершенной конъюнктивной и в совершенной дизъюнктивной нормальной формах: $(a \cap b) \cup \bar{a}$.*



- *Записать матрицу инцидентности вершин графа:*