

## **Дифференциальные уравнения**

Контрольные задания

### Теоретические вопросы

1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделенными и разделяющимися переменными, однородные и приводящиеся к однородным.
3. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.
4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
5. Приближенное интегрирование дифференциального уравнения первого порядка методом изоклин.
6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Общее и частное решения. Общий и частный интегралы.
7. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
8. Линейные однородные дифференциальные уравнения порядка  $n$ . Определения и общие свойства.
9. Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций. Необходимое условие линейной зависимости системы функций.
10. Условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.
11. Линейное однородное дифференциальное уравнение. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.
12. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Структура общего решения.
13. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

14. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (случай простых корней характеристического уравнения).
15. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (случай кратных корней характеристического уравнения).
16. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Метод подбора.

### Литература

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. т.2.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч.2.
5. Руководство к решению задач по высшей математике. ч.2 / Под общ. ред. Е.И. Гурского.
6. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения : примеры и задачи.
7. Сборник задач по математике для втузов. ч.2. Специальные разделы математического анализа.
8. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты).

### Расчетные задания

**Задание 1.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения. Ответ представить в виде  $\Psi(x,y)=C$ .

1)  $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$

2)  $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

3)  $\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$

4)  $\sqrt{3+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$

5)  $6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx$

6)  $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0$

7)  $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x} dx = 0$

8)  $y' y \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$

9)  $6x dx - 6y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$

10)  $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0$

11)  $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$

12)  $\sqrt{4-x^2} y' + xy^2 + x = 0$

13)  $2x dx - 2y dy = x^2 y dy - 2xy^2 dx$

14)  $x\sqrt{4+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0$

15)  $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$

16)  $\sqrt{5+y^2} + y' y \sqrt{1-x^2} = 0$

17)  $6x dx - y dy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$

18)  $y \ln y + xy' = 0$

19)  $(1 + e^x)y' = ye^x$

20)  $\sqrt{1-x^2} y' + xy^2 + x = 0$

21)  $6x dx - 2y dy = 2yx^2 dy - 3xy^2 dx$

22)  $y(1 + \ln y) + xy' = 0$

23)  $(3 + e^x)yy' = e^x$

24)  $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2} yy' = 0$

25)  $x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx$

26)  $\sqrt{5+y^2} dx + 4(x^2 y + y)dy = 0$

27)  $(1 + e^x)yy' = e^x$

28)  $3(x^2 y + y)dy + \sqrt{2+y^2} dx = 0$

29)  $2x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx$

30)  $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2} y' = 0$

**Задание 2.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$1) y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$$

$$2) xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$$

$$3) y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$4) xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$$

$$5) 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$$

$$6) xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$$

$$7) y' = \frac{x+2y}{2x-y}$$

$$8) xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$$

$$9) 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$$

$$10) xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$$

$$11) y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$$

$$12) xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$$

$$13) y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$$

$$14) xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$$

$$15) y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$$

$$16) xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$$

$$17) 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$$

$$18) xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$$

$$19) y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$$

$$21) y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$$

$$23) y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$$

$$25) 4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$$

$$27) y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$$

$$29) 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$$

$$20) xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$$

$$22) xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$$

$$24) xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$$

$$26) xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$$

$$28) xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$$

$$30) xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$$

**Задание 3.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$1) y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}$$

$$2) y' = \frac{x+y-2}{2x-2}$$

$$3) y' = \frac{3y-x-4}{3x+3}$$

$$4) y' = \frac{2y-2}{x+y-2}$$

$$5) y' = \frac{x + y - 2}{3x - y - 2}$$

$$7) y' = \frac{x + 7y - 8}{9x - y - 8}$$

$$9) y' = \frac{3y + 3}{2x + y - 1}$$

$$11) y' = \frac{x - 2y + 3}{-2x - 2}$$

$$13) y' = \frac{2x + 3y - 5}{5x - 5}$$

$$15) y' = \frac{x + 3y - 4}{5x - y - 4}$$

$$17) y' = \frac{x + 2y - 3}{x - 1}$$

$$19) y' = \frac{5y + 5}{4x + 3y - 1}$$

$$21) y' = \frac{x + y + 2}{x + 1}$$

$$23) y' = \frac{2x + y - 3}{2x - 2}$$

$$25) y' = \frac{x + 5y - 6}{7x - y - 6}$$

$$6) y' = \frac{2x + y - 3}{x - 1}$$

$$8) y' = \frac{x + 3y + 4}{3x - 6}$$

$$10) y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$$

$$12) y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}$$

$$14) y' = \frac{4y - 8}{3x + 2y - 7}$$

$$16) y' = \frac{y - 2x + 3}{x - 1}$$

$$18) y' = \frac{3x + 2y - 1}{x + 1}$$

$$20) y' = \frac{x + 4y - 5}{6x - y + 5}$$

$$22) y' = \frac{2x + y - 3}{4x - 4}$$

$$24) y' = \frac{y}{2x + 2y - 2}$$

$$26) y' = \frac{x + y - 4}{x - 2}$$

$$27) y' = \frac{2x + y - 1}{2x - 2}$$

$$29) y' = \frac{6y - 6}{5x + 4y - 9}$$

$$28) y' = \frac{3y - 2x + 1}{3x + 3}$$

$$30) y' = \frac{x + 6y - 7}{8x - y - 7}$$

**Задание 4.** Найти решение задачи Коши.

$$1) y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 0$$

$$2) y' - y \cdot \operatorname{ctgx} = 2x \cdot \sin x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$3) y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, y(0) = 0$$

$$4) y' + y \cdot \operatorname{tgx} = \cos^2 x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$5) y' - \frac{y}{x + 2} = x^2 + 2x, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$6) y' - \frac{1}{x + 1} y = e^x (x + 1), y(0) = 1$$

$$7) y' - \frac{y}{x} = x \cdot \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$8) y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi}$$

$$9) y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1$$

$$10) y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \frac{2}{3}$$

$$11) y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, y(2) = 4$$

$$12) y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, y(1) = e$$

$$13) y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}, y(1) = 1$$

$$14) y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, y(1) = 4$$

$$15) y' + \frac{2}{x} y = x^3, y(1) = -\frac{5}{6}$$

$$16) y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 1$$

$$17) y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, y(1) = 3$$

$$18) y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, y(1) = 1$$

$$19) y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1$$

$$20) y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1}$$

$$21) y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3}$$

$$22) y' + xy = -x^3, y(0) = 3$$

$$23) y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2, y(0) = 1$$

$$24) y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x, y(0) = 1$$

$$25) y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, y(0) = \frac{1}{2}$$

$$26) y' - y \cdot \cos x = -\sin 2x, y(0) = 3$$

$$27) y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -\frac{1}{2}$$

$$28) y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1$$

$$29) y' - 3x^2 y = x^2 (1+x^3) / 3, y(0) = 0$$

$$30) y' - y \cdot \cos x = \sin 2x, y(0) = -1$$

**Задание 5.** Решить задачу Коши.

$$1) y^2 dx + (x + e^{\frac{2}{y}}) dy = 0, y(e) = 2$$

$$2) (y^4 e^y + 2x)y' = y / y(0) = 1$$

$$3) y^2 dx + (xy - 1)dy = 0, y(1) = e$$

$$4) 2(4y^2 + 4y - x)y' = 1, y(0) = 0$$

$$5) (\cos 2y \cdot \cos^2 y - x)y' = \sin y \cdot \cos y, \\ y(1/4) = \pi/3$$

$$6) (x \cos^2 y - y^2)y' = y \cos^2 y, y(\pi) = \pi/4$$

$$7) e^{y^2} (dx - 2xydy) = ydy, y(0) = 0$$

$$8) (104y^3 - x)y' = 4y, y(8) = 1$$

$$9) dx + (xy - y^3)dy = 0, y(-1) = 0$$

$$10) (3y \cdot \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x)y' = y, \\ y(16) = \pi / 4$$

$$11) 8(4y^3 + xy - y)y' = 1, y(0) = 0$$

$$12) (2 \ln y - \ln^2 y)dy = ydx - xdy, y(4) = e^2$$

$$13) 2(x + y^4)y' = y, y(-2) = -1$$

$$14) y^3(y - 1)dx + 3xy^2(y - 1)dy = (y + 2)dy, y(\frac{1}{4}) = 2$$

$$15) 2y^2 dx + (x + e^{\frac{1}{y}})dy = 0, y(e) = 1$$

$$16) (xy + \sqrt{y})dy + y^2 dx = 0, y(-\frac{1}{2}) = 4$$

$$17) \sin 2y dx = (\sin^2 2y - 2 \sin^2 y + 2x)dy, y(-\frac{1}{2}) = \pi/4$$

$$18) (y^2 + 2y - x)y' = 1, y(2) = 0$$

$$19) 2y\sqrt{y}dx - (6x\sqrt{y} + 7)dy = 0, y(-4) = 1$$

$$20) dx = (\sin y + 3 \cos y + 3x)dy, y(e^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2}$$

$$21) 2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x)y' = \sin 2y, y(\frac{3}{2}) = \frac{5\pi}{4}$$

$$22) dx + (2x + \sin 2y - 2 \cos^2 y)dy = 0, y(-1) = 0$$

$$23) (13y^3 - x)y' = 4y, y(5) = 1$$

$$24) y^2(y^2 + 4)dx + 2xy(y^2 + 4)dy = 2dy, \\ y(\pi/8) = 2$$

$$25) (x + \ln^2 y - \ln y)y' = \frac{y}{2}, \quad y(2) = 1$$

$$26) (2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx = 0, \quad y(-\frac{1}{2}) = 1$$

$$27) ydx + (2x - 2\sin^2 y - y \cdot \sin 2y)dy = 0, \\ y(\frac{3}{2}) = \frac{\pi}{4}$$

$$28) 2(y^3 - y + xy)dy = dx, \quad y(-2) = 0$$

$$29) (2y + x \cdot \operatorname{tg} y - y^2 \operatorname{tg} y)dy = dx, \quad y(0) = \pi$$

$$30) 4y^2dx + (e^{1/2y} + x)dy = 0, \quad y(e) = \frac{1}{2}$$

**Задание 6.** Найти решение задачи Коши.

$$1) y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 1$$

$$2) xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

$$3) 2(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 2$$

$$4) y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}y^2, \quad y(0) = 1$$

$$5) xy' - y = -y^2(\ln x + 2) \ln x, \quad y(1) = 1$$

$$6) 2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 2$$

$$7) 3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3$$

$$8) 2y' + y \cdot \cos x = y^{-1} \cos x(1 + \sin x), \quad y(0) = 1$$

$$9) y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3), \quad y(0) = -1$$

$$10) 3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, \quad y(0) = -1$$

$$11) 2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$12) 3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, \quad y(1) = 1$$

$$13) 2y' + 3y \cdot \cos x = e^{2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1$$

$$14) 3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 3$$

$$15) y' - y = 2xy^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

$$16) 2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, \quad y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$17) y' + 2xy = 2x^3y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}$$



$$18) xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1$$

$$19) 2y' + 3y \cdot \cos x = (8 + 12 \cos x)e^{2x}y^{-1}, y(0) = 2$$

$$20) 4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2, y(0) = 1$$

$$21) 8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \sqrt{2}$$

$$22) 2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2$$

$$23) y' + xy = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 12$$

$$24) 2y' - 3y \cdot \cos x = -e^{-2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1},$$

$$y(0) = 1$$

$$25) y' - y = xy^2, y(0) = 1$$

$$26) 2(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 2$$

$$27) y' + y = xy^2, y(0) = 1$$

$$28) xy' + y = xy^2, y(1) = 1$$

$$29) 2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 2$$

$$30) y' - y \cdot \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}y^4 \sin x, y(0) = 1$$

**Задание 7.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$1) 3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0$$

$$2) (3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y}) dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0$$

$$3) (3x^2 + 4y^2) dx + (8xy + e^y) dy = 0$$

$$4) (2x - 1 - \frac{y}{x^2}) dx - (2y - \frac{1}{x}) dy = 0$$

$$5) (y^2 + y \cdot \sec^2 x) dx + (2xy + \operatorname{tg} x) dy = 0$$

$$6) (3x^2 y + 2y + 3) dx + (x^3 + 2x + 3y^2) dy = 0$$

$$7) (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}) dx +$$

$$+ (\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}) dy = 0$$

$$8) (\sin 2x - 2 \cos(x + y)) dx - 2 \cos(x + y) dy = 0$$

$$9) (xy^2 + \frac{x}{y^2}) dx + (x^2 y - \frac{x^2}{y^3}) dy = 0$$

$$10) (\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}) dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0$$

$$11) \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx - (\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y) dy = 0$$

$$12) \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left( x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0$$

$$13) \frac{1 + xy}{x^2 y} dx + \frac{1 - xy}{x y^2} dy = 0$$

$$14) \frac{dx}{y} - \frac{x + y^2}{y^2} dy = 0$$

$$15) \frac{y}{x^2} dx + \frac{xy + 1}{x} dy = 0$$

$$16) \left( x e^x + \frac{y}{x^2} \right) dx - \frac{1}{x} dy = 0$$

$$17) \left( 10xy - \frac{1}{\sin y} \right) dx + \left( 5x^2 + \frac{x \cdot \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3 \right) dy = 0$$

$$18) \left( \frac{y}{x^2 + y^2} + e^x \right) dx - \frac{x dy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$19) e^y dx + (\cos y + x e^y) dy = 0$$

$$20) (y^3 + \cos x) dx + (3xy^2 + e^y) dy = 0$$

$$21) x e^{y^2} dx + (x^2 y e^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y) dy = 0$$

$$22) (5xy^2 - x^3) dx + (5x^2 y - y) dy = 0$$

$$23) (\cos(x + y^2) + \sin x) dx + 2y \cos(x + y^2) dy = 0$$

$$24) (x^2 - 4xy - 2y^2) dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) dy = 0$$

$$25) \left( \sin y + y \sin x + \frac{1}{x} \right) dx + \left( x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0$$

$$26) \left( 1 + \frac{1}{y} e^{x/y} \right) dx + \left( 1 - \frac{x}{y^2} e^{x/y} \right) dy = 0$$

$$27) \frac{(x - y) dx + (x + y) dy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$28) 2(3xy^2 + 2x^3) dx + 3(2x^2 y + y^2) dy = 0$$

$$29) (3x^3 + 6x^2 y + 3xy^2) dx + (2x^3 + 3x^2 y) dy = 0$$

$$30) xy^2 dx + y(x^2 + y^2) dy = 0$$

**Задание 8.** Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку М.

$$1) y' = y - x^2, M(1,2)$$

$$2) yy' = -2x, M(0,5)$$

$$3) y' = 2 + y^2, M(1,2)$$

$$4) y' = \frac{2x}{3y}, M(1,1)$$

$$5) y' = (y - 1)x, M(1, \frac{3}{2})$$

$$6) yy' + x = 0, M(-2, -3)$$

$$7) y' = 3 + y^2, M(1,2)$$

$$8) xy' = 2y, M(2,3)$$

$$9) y'(x^2 + 2) = y, M(2,2)$$

$$10) x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, M(2,1)$$

$$11) y' = y - x, M(\frac{9}{2}, 1)$$

$$12) y' = x^2 - y, M(1, \frac{1}{2})$$

$$13) y' = xy, M(0,1) \quad 14) y' = xy, M(0,1)$$

$$15) yy' = -\frac{x}{2}, M(4,2)$$

$$16) 2(y + y') = x + 3, M(1, \frac{1}{2})$$

$$17) y' = x + 2y, M(3,0)$$

$$18) xy' = 2y, M(1,3)$$

$$19) 3yy' = x, M(-3, -2)$$

$$20) y' = y - x^2, M(-3,4)$$

$$21) x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, M(-2,1)$$

$$22) y' = x^2 - y, M(2, \frac{3}{2})$$

$$23) y' = y - x, M(2,1)$$

$$24) yy' = -x, M(2,3)$$

$$25) y' = y - x, M(4,2)$$

$$26) 3yy' = x, M(1,1)$$

$$27) y' = x^2 - y, M(0,1)$$

$$28) x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, M(-2, -1)$$

$$29) y' = 3y^{\frac{2}{3}}, M(1,3)$$

$$30) y' = x(y - 1), M(1, \frac{1}{2})$$

### Задание 9.

Найти линию, проходящую через точку  $M_0$  и обладающую тем свойством, что в любой ее точке  $M$  нормальный вектор  $\overline{MN}$  с концом на оси  $OY$  имеет длину, равную  $a$ , и образует острый угол  $\alpha$  с положительным направлением оси  $OY$ .

- 1)  $M_0(15,1), a = 25$ , 2)  $M_0(12,2), a = 20$   
 3)  $M_0(9,3), a = 15$ , 4)  $M_0(6,4), a = 10$   
 5)  $M_0(3,5), a = 5$

Найти линию, проходящую через точку  $M_0$ , если отрезок любой ее нормали, заключенный между осями координат, делится точкой линии в отношении  $a:b$  ( считая от оси  $OY$  ).

6.  $M_0(1,1), a:b = 1:2$                       7.  $M_0(-2,3), a:b = 1:3$   
 8.  $M_0(0,1), a:b = 2:3$                       9.  $M_0(1,0), a:b = 3:2$   
 10.  $M_0(2,-1), a:b = 3:1$

Найти линию, проходящую через точку  $M_0$ , если отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью  $OY$  делится в точке пересечения с осью абсцисс в отношении  $a:b$  ( считая от оси  $OY$  ).

11.  $M_0(2,-1), a:b = 1:1$                       12.  $M_0(1,2), a:b = 2:1$   
 13.  $M_0(-1,1), a:b = 3:1$                       14.  $M_0(2,1), a:b = 1:2$   
 15.  $M_0(1,-1), a:b = 1:3$

Найти линию, проходящую через точку  $M_0$ , если отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении  $a:b$  ( считая от оси  $OY$  ).

16.  $M_0(1,2), a:b = 1:1$                       17.  $M_0(2,1), a:b = 1:2$   
 18.  $M_0(1,3), a:b = 2:1$                       19.  $M_0(2,-3), a:b = 3:1$   
 20.  $M_0(3,-1), a:b = 3:2$

Найти линию, проходящую через точку  $M_0$  и обладающую тем свойством, что в любой ее точке  $M$  касательный вектор  $\overline{MN}$  с концом на оси  $OX$  имеет проекцию на ось  $OX$ , обратно пропорциональную абсциссе точки  $M$ . Коэффициент пропорциональности равен  $a$ .

21.  $M_0(1,e), a = -1/2$                       22.  $M_0(2,e), a = -2$   
 23.  $M_0(-1, \sqrt{e}), a = -1$                       24.  $M_0(2, \frac{1}{e}), a = 2$   
 25.  $M_0(1, \frac{1}{e^2}), a = 1/4$

Найти линию, проходящую через точку  $M_0$  и обладающую тем свойством, что в любой ее точке  $M$  касательный вектор  $\overline{MN}$  с концом на оси  $OY$  имеет проекцию на ось  $OY$ , равную  $a$ .

26.  $M_0(1,2), a = -1$                       27.  $M_0(1,4), a = 2$   
 28.  $M_0(1,5), a = -2$                       29.  $M_0(1,3), a = -4$   
 30.  $M_0(1,6), a = 3$

**Задание 10.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.  $y'' + y'tgx = \sin x \cos x$

2.  $xy'' - y' = x^2 - x$

3.  $(y')^2 + yy'' = 0$

4.  $yy'' - (y')^2 = 0$

5.  $y'' x \ln x = y'$

6.  $y^3 y'' = 1$

7.  $y'' + \frac{y'}{x} = 0$

8.  $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$

9.  $y'' = 2 - y$

10.  $x(y'' + 1) + y' = 0$

11.  $xy'' - y' = x^2 e^x$

12.  $y'' + 2x(y')^2 = 0$

13.  $y'' tgx = y' + 1$

14.  $y'' - 2ctgx \cdot y' = \sin^3 x$

15.  $2xy' y'' = (y')^2 + 1$

16.  $2yy'' = (y')^2$

17.  $y''(1 + y) = 5(y')^2$

18.  $xy'' - y' = x^2 e^x$

19.  $2yy'' = 1 + (y')^2$

20.  $y'' y^3 = 1$

21.  $y'' + tgx \cdot y' = \frac{\sin 2x}{2}$

22.  $y'' + \frac{2(y')^2}{1 - y} = 0$

23.  $yy'' + (y')^2 = 0$

24.  $yy'' - (y')^2 = 0$

25.  $y'' x \ln x = y'$

26.  $y'' y^3 = 1$

27.  $y'' + \frac{y'}{x} = 0$

28.  $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$

29.  $y'' = 2 - y$

30.  $x(y'' + 1) + y' = 0$

**Задание 11.** Найти частное решение дифференциального уравнения.

1)  $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x,$

$y(0) = 0; y'(0) = 1/9$

2)  $y'' - y' = x + 1$

$y(0) = 0; y'(0) = 2$

$$3) y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$$

$$y(0) = 0; y'(0) = 1$$

$$4) y'' - 7y' + 12y = e^{3x}$$

$$y(0) = 0; y'(0) = 2$$

$$5) y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$6) y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x$$

$$y(0) = 5, y'(0) = 6$$

$$7) y'' - 5y' + 6y = xe^x$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$8) y'' + 2y' + y = x + \cos x$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$9) y'' + 2y' + y = x + \sin x$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$10) y'' - 4y' + 3y = xe^{2x}$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$11) y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$$

$$y(0) = 4/3, y'(0) = 1/27.$$

$$12) y'' - 3y' = x + \cos x,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = -1/9$$

$$13) y'' - 6y' + 9y = e^{3x},$$

$$y(0) = 1; y'(0) = 0$$

$$14) y'' - y = 9xe^{2x},$$

$$y(0) = 0; y'(0) = -5$$

$$15) y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$$

$$y(0) = 0; y'(0) = 1$$

$$16) y'' - 4y' + 4y = 2(x + \sin x),$$

$$y(0) = 0; y'(0) = 1$$

$$17) y'' + 9y = 6e^{3x},$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$18) y'' - y' = x + 1,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 2$$

$$19) y'' + 4y = 8 \sin 2x,$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$20) y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^{3x}$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$21) y'' - y = 2(1 - x),$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$22) y'' - 4y' + 4y = e^{3x} + 25 \sin x,$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 0$$

$$23) y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$24) y'' - 7y' + 12y = e^{3x}$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$25) y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^{4x},$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$26) y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x,$$

$$y(0) = 5, y'(0) = 6$$

$$27) y'' - 3y' - 4y = 5 \cos x,$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$28) y'' + 2y' + y = x + \cos x,$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$29) y'' + 2y' + y = x + \sin x,$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$30) y'' - 4y' + 3y = x e^{2x},$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

**Задание 12.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$1) y'' - 2y' + y = 8 \sin x$$

$$2) y'' - 3y' - 4y = \cos 5x$$

$$3) y'' - 4y' + 4y = 3 \sin 2x$$

$$4) y'' - y = x + \sin x$$

$$5) y'' - 2y' + 5y = \sin 2x$$

$$6) y'' - 3y' = x^3 + 1$$

$$7) y'' - 3y' - 4y = 5 \cos x$$

$$8) y'' - 2y' = 3e^{2x}$$

$$9) y'' - 7y' + 12y = 5e^{4x}$$

$$10) y'' + y = \sin x$$

$$11) y'' + y = 2 \cos x$$

$$12) y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$$

$$13) y'' + 4y = 2 \sin x$$

$$14) y'' - y' = \sin x + 2 \cos x$$

$$15) y'' + 9y = \sin 3x$$

$$16) y'' - 2y' + y = e^x$$

$$17) 2y'' - 5y' = \cos x$$

$$18) y'' - 4y' + 4y = 2 \sin 2x$$

$$19) y'' - 10y' + 25y = 5e^x$$

$$20) y'' + y' = \cos x$$

$$21) 2y'' + 8y = \sin 2x$$

$$22) y'' + 3y' = x + 3$$

$$23) y'' - 3y' - 4y = 5 \cos x$$

$$24) y'' + y = x - \cos x$$

$$25) y'' - 2y' + 5y = \cos 2x$$

$$26) y'' - 2y' = x^2 + 3$$

$$27) y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

$$28) 2y'' + 4y' = e^{2x}$$

$$29) y'' - 7y' + 12y = 4e^{3x}$$

$$30) y'' + 3y' = \cos 3x$$

$$7) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 8y \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 9y \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 11y \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$$

### Задание 13.

Решить систему дифференциальных уравнений .

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 6y \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 9y - 2x \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 9x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 8y \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 15y \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$$



$$17) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 8y \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 9y \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 11y \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 6y \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 9y \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 9x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 8y \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 15y \end{cases}$$

**Задание 14.** Решить задачу.

1. Определить путь, Тело массой  $m = 1$  движется прямолинейно. На него действует сила, пропорциональная времени, протекшему от момента, когда  $v = 0$  ( коэффициент пропорциональности 2 ). Кроме того, тело испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости ( коэффициент пропорциональности 3 ). Найти скорость в момент  $t = 3$  сек.
2. Тело массой  $m = 1$  движется прямолинейно под действием силы, пропорциональной времени, протекшему от момента, когда  $v = 0$  ( коэффициент пропорциональности равен 3 ). Кроме того, оно испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости ( коэффициент пропорциональности 2 ). Найти путь, пройденный телом за  $t = 4$  сек.
3. Материальная точка массой  $m = 1$  без начальной скорости медленно погружается в жидкость. Найти путь, пройденный точкой за время  $t = 0,5$  сек., считая, что при медленном погружении сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости погружения ( коэф. пропорц. равен 2 ).
4. На тело массой  $m = 1$ , движущееся прямолинейно, действует сила, пропорциональная квадрату времени, протекшему от момента, когда  $v = 0$  ( коэф. пропорц. равен 2 ). Кроме того, тело испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости ( коэффициент пропорциональности 1 ). Найти зависимость пути от времени.
5. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью  $v_0 = 9$  км./ час. На полном ходу ее мотор был выключен и через 20 сек. скорость лодки

- уменьшилась до 4.5 км./час. пройденный лодкой за 1 мин. (с выключенным мотором ).
6. Найти уравнение кривой, проходящей через т.  $A(\sqrt{10}, \sqrt{10})$  и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равен кубу абсциссы точки касания.
  7. Найти уравнение кривой, проходящей через т.  $A(1,4)$  и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен удвоенной абсциссе точки касания.
  8. Найти уравнение кривой, проходящей через т.  $B(3,4)$  и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен удвоенному модулю радиус-вектора точки касания.
  9. Найти уравнение кривой, проходящей через т.  $A(4,4)$  и обладающей тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, делится осью ординат пополам.
  10. Найти уравнение кривой, проходящей через т.  $A(9,9)$  и обладающей тем свойством, что угловой коэффициент любой касательной к ней вдвое меньше углового коэффициента радиус-вектора точки касания.
  11. Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству. Найти зависимость массы  $X$  радия от времени  $t$ , если известно, что по истечении 1600 лет остается половина первоначального количества, равного 2.
  12. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости. Найти угловую скорость диска через 3 мин. после начала вращения, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 200 оборотов в мин. по истечении одной минуты вращается со скоростью 120 оборотов в мин.
  13. Найти давление  $P$  воздуха на высоте  $h = 1000$  м., если известно, что давление воздуха равно 1 кг. на 1 см.<sup>2</sup> над

- уровнем моря ( $h = 0$ ) и  $0,92$  кг. на  $1 \text{ см.}^2$  на высоте  $h = 500$  м.
14. Катер движется в спокойной воде со скоростью  $v_0 = 10$  км./час. На полном ходу его мотор был выключен и через 2 мин. скорость катера уменьшилась до  $v_1 = 0,5$  км./час. Найти скорость, с которой двигался катер через 40 сек. после выключения мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения катера.
  15. В силу закона Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна  $20^0$  и тело в течение часа охлаждается от  $100^0$  до  $30^0$ , то через сколько минут (с момента начала охлаждения) его температура понизится до  $60^0$ ?
  16. Найти уравнение кривой, проходящей через т.  $A(3,1)$  и обладающей тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью  $OX$  делится пополам в точке пересечения с осью  $OY$ .
  17. Найти уравнение кривой, проходящей через т.  $B(1,0)$  и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый касательной на оси  $OY$ , равен радиус-вектору точки касания.
  18. Точка массой  $m = 1$  начинает двигаться без начальной скорости ( $v_0 = 0$ ). На нее действует сила, пропорциональная времени (коэффициент пропорциональности 3). Кроме того, точка испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности 2). Найти путь, пройденный точкой за время  $t = 2$  сек.
  19. Найти уравнение кривой, проходящей через т.  $B(1,1)$  и обладающей тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой точке кривой вдвое больше углового коэффициента радиус-вектора точки касания.
  20. Найти уравнение кривой, проходящей через т.  $A(1,2)$  и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен абсциссе точки касания.
  21. Тело массой  $m = 1$  движется прямолинейно. На него действует сила, пропорциональная времени, протекшему от момента, когда  $v = 0$  (коэффициент пропорциональности 2). Кроме того, тело испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности 3). Найти скорость в момент  $t = 2$  сек.
  22. Найти уравнение кривой, проходящей через т.  $A(-1,-1)$  и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равен квадрату абсциссы точки касания.
  23. Материальная точка массой  $m = 1$  без начальной скорости ( $v_0 = 0$ ) медленно погружается в жидкость. Найти путь, пройденный точкой за время  $t = 1$  сек., считая, что при медленном погружении сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости погружения (коэф. пропорц. равен 2).
  24. На тело массой  $m = 1$ , движущееся прямолинейно, действует сила, пропорциональная квадрату времени (коэф. пропорц. равен 3). Кроме того, тело испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности 1). Найти зависимость пути от времени.
  25. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью  $v_0 = 9$  км/час. На полном ходу ее мотор был выключен и через 20 сек. скорость лодки уменьшилась до 4,5 км/час. Определить путь, пройденный лодкой за 50 сек. (с момента выключения мотора).
  26. Найти уравнение кривой, проходящей через точку  $A(\sqrt{17}, \sqrt{17})$  и обладающей тем свойством, что отрезок,

- отсекаемый на оси  $OX$  касательной, проведенной в любой точка кривой, равен кубу абсциссы точки касания.
27. Найти уравнение кривой, проходящей через точку  $B(1,3)$  и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси  $OY$  любой касательной, равен удвоенной абсциссе точки касания.
28. Найти уравнение кривой, проходящей через точку  $A(2,0)$  и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси  $OY$  любой касательной, равен удвоенной абсциссе точки касания.
29. Найти уравнение кривой, проходящей через точку  $B(9,1)$  и обладающей тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенный между точкой касания и осью  $OX$ , делится пополам осью  $OY$ .
30. Найти уравнение кривой, проходящей через точку  $B(16,1)$  и обладающей тем свойством, что угловой коэффициент любой касательной вдвое меньше углового коэффициента радиус-вектора точки касания.

#### Основные определения

*Дифференциальным уравнением (ДУ) называют уравнение,*

связывающее независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y$  и ее производные по  $x$  различных

порядков.

*Порядком ДУ* называют порядок старшей производной, входящей в уравнение.

В общем виде ДУ порядка  $n$  можно записать:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

В частных случаях в уравнение (1) могут не входить  $x$ ,  $y$  и отдельные производные порядка ниже  $n$ .

*Решением ДУ* (1) называется всякая функция  $y = \varphi(x)$ , обращающая (1) в тождество.

*Решить* или проинтегрировать ДУ - это значит найти все его решения в заданной области.

График решения ДУ называют *интегральной кривой*.

*Общим решением ДУ* (1) называют его решение

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (2)$$

содержащее столько независимых произвольных постоянных  $c_1, c_2, \dots, c_n$  каков порядок уравнения.

Если общее решение задано в неявном виде:

$\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ , то его называют *общим интегралом*.

*Частным решением ДУ* (1) называется функция

$y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)$ , которая получается из общего решения

(2) при некоторых определенных значениях постоянных :

$$c_1 = c_1^0, c_2 = c_2^0, \dots, c_n = c_n^0.$$

